



# Raccordement de développements asymptotiques pour des problèmes aux valeurs propres comportant deux cavités reliées par un petit trou en dimensions 2 et 3

Sébastien Tordeux

## ► To cite this version:

Sébastien Tordeux. Raccordement de développements asymptotiques pour des problèmes aux valeurs propres comportant deux cavités reliées par un petit trou en dimensions 2 et 3. Séminaire d'analyse numérique, LJK, 2009, Grenoble, France. inria-00528075

**HAL Id: inria-00528075**

**<https://inria.hal.science/inria-00528075>**

Submitted on 21 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

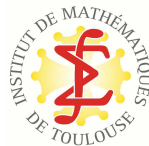
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Raccordement de développements asymptotiques pour des problèmes aux valeurs propres comportant deux cavités reliées par un petit trou en dimensions 2 et 3

Sébastien Tordeux

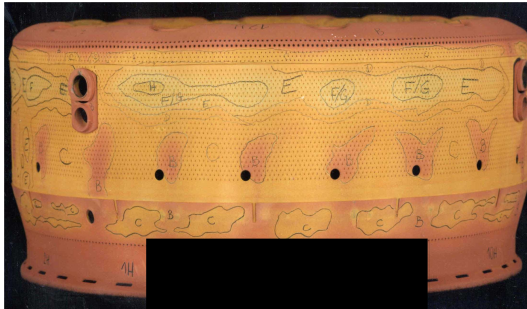
Institut de Mathématiques de Toulouse – INSA Toulouse

Grenoble, le 26 novembre 2009



# Motivation

- Le coffrage d'une chambre de combustion de turbo-réacteur de Turbo Meca (groupe SAFRAN, - [Remerciements](#) -).



- Objectif: étudier les effets des petits trous sur les fréquences de résonances acoustiques
- **Développement asymptotiques raccordés (MAE).**

# Une bibliographie non exhaustive

- **Petits trous:** Rauch et Taylor (75), Tuck (75), Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia (82), Taflov (88), Bonnet-BenDhia, Drissi et Gmati (04), Mendez et Nicoud (08), [Gadyl'shin \(92\)](#).
- **problème de Dumbell:** Beale (73), Jimbo et Morita (92), Brown, Hislop et Martinez (95), Arrieta (95), Anné (95).
- **Développements asymptotiques raccordés:** Van Dyke (75), Il'in (92), Joly et Tordeux (06,08)
- **quasi-mode et min-max:** Bamberger et Bonnet (90), Dauge, Djurdjevic, Faou et Rössle (99), Bonnaillie-Noël et Dauge (06).

# Plan de l'exposé

- 1 Condition de Dirichlet en dimension 2
  - Définition du développement asymptotique
  - Estimations d'erreurs
  - Simulations numériques
  
- 2 Condition de Neumann en dimension 3
  - Définition du développement asymptotique
  - Estimations d'erreurs
  - Simulations numériques

# Partie I

## Condition aux limites de Dirichlet en 2D

avec Bendali, Huard, Tizaoui, Vila

INSA-Toulouse, Institut de Mathématiques de Toulouse

# Le problème modèle

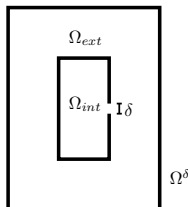
Trouver  $u_n^\delta \in H^1(\Omega^\delta)$  et  $\lambda_n^\delta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u_n^\delta) = \lambda_n^\delta b u_n^\delta \text{ dans } \Omega^\delta, \\ u_n^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega^\delta, \end{cases}$$

- avec  $a$  et  $b$  deux fonctions positives régulières à deux côtés

$$a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \text{ et } b|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq b|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})$$

- Le petit paramètre  $\delta > 0$  est l'épaisseur du trou.



# Le problème limite

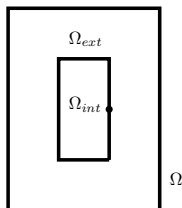
Trouver  $u_n \in H^1(\Omega)$  et  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u_n) = \lambda_n b u_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

- avec  $a$  et  $b$  deux fonctions positives régulières à deux côtés

$$a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \text{ et } b|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq b|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})$$

- Cette géométrie correspond à  $\delta = 0$ .



Hypothèse: Les valeurs propres de  $\Omega$  sont simples.

Remarque:  $\Omega$  n'est pas connexe.

$$u_n|_{\Omega_{\text{int}}} = 0 \text{ ou } u_n|_{\Omega_{\text{ext}}} = 0.$$



# Théorie classique des problèmes aux valeurs propres

Les  $\lambda_n^\delta$  et  $\lambda_n$  forment des familles dénombrables:

$$\begin{cases} 0 < \lambda_1^\delta < \lambda_2^\delta < \dots < \lambda_n^\delta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases}$$

Le principe du min-max:

$$\lambda_n^\delta \leq \lambda_n \quad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

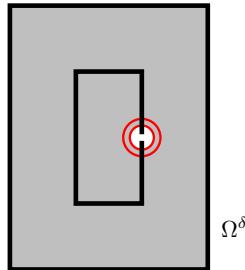
Quelques questions naturelles:

$$\lambda_n^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lambda_n?$$

Peut-on dériver une méthode efficace de calcul de  $\lambda_n^\delta$  sans raffinement de maillage local?

# Les développements asymptotiques raccordés

C'est une méthode décomposition de domaine avec recouvrement



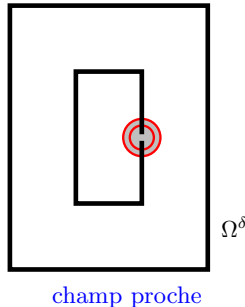
champ lointain

La solution est décomposée en

- un champ **lointain**.
- un champ **proche**.

# Les développements asymptotiques raccordés

C'est une méthode décomposition de domaine avec recouvrement

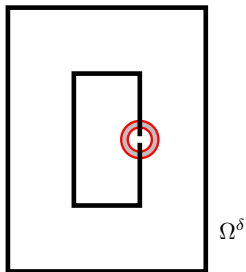


La solution est décomposée en

- un champ **lointain**.
- un champ **proche**.

# Les développements asymptotiques raccordés

C'est une méthode décomposition de domaine avec recouvrement



zone de raccord

La solution est décomposée en

- un champ **lointain**.
- un champ **proche**.

# Le développement asymptotique des valeurs propres

- Le développement d'ordre 2 s'écrit

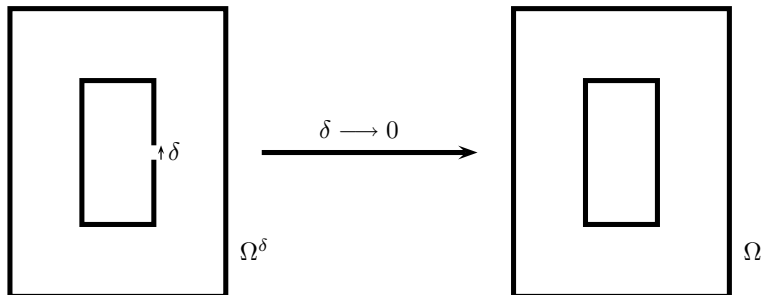
$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta \lambda^1 + \delta^2 \lambda^2 + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

- Les coefficients  $\lambda^i \in \mathbb{R}$  ne dépendent pas de  $\delta$
- pas de fonction de jauge logarithmique? ce n'est pas trivial

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta \lambda^1 + \delta^2 \lambda^2 + \delta^3 \lambda^3 + \delta^4 \lambda^{4,0} + \delta^4 \ln \delta \lambda^{4,1} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^4).$$

- Nécessité d'écrire une preuve!

# Le développement en champ lointain



## Le développement d'ordre 2:

$$u^\delta = u^0 + \delta u^1 + \delta^2 u^2 + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2)$$

Les coefficients  $u^i$  sont

- définis sur le domaine limite  $\Omega$
- indépendants de  $\delta$

# Le développement en champ lointain

Les coefficients sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^0 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^0) + \lambda^0 b u^0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

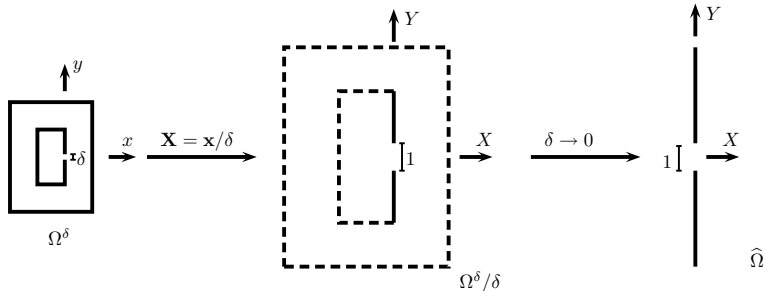
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^1 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^1) + \lambda^0 b u^1 = -\lambda^1 b u^0, & \text{dans } \Omega, \\ u^1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^2 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^2) + \lambda^0 b u^2 = -\lambda^2 b u^0 - \lambda^1 b u^1, & \text{dans } \Omega, \\ u^2 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right. \quad (2)$$

- Le coefficient  $u^0$  est une fonction propre de  $\Omega$  associée à  $\lambda^0$ .
- Les coefficients  $u^1$  et  $u^2$  peuvent être singuliers en  $\mathbf{x} = 0$ .
- Les problèmes (1) et (2) ne définissent pas de manière unique  $u^1$  et  $u^2$ .

# Le développement en champ proche

Soit  $X = \frac{x}{\delta}$ ,  $Y = \frac{y}{\delta}$  et  $\Pi^\delta(X, Y) = u^\delta(\delta X, \delta Y)$ .



## Le développement d'ordre 2:

$$\Pi^\delta(X, Y) = \Pi^0(X, Y) + \delta \Pi^1(X, Y) + \delta^2 \Pi^2(X, Y) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

Ses fonctions sont

- définies sur le domaine de champ proche  $\hat{\Omega}$ .
- indépendants de  $\delta$ .



# Les coefficients de champ proche

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^0 \in H_{loc}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^0) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ \Pi^0 = 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^1 \in H_{loc}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^1) = -\nabla \cdot (a_1 \nabla \Pi^0) \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ \Pi^1 = 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^2 \in H_{loc}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^2) = -\nabla \cdot (a_1 \nabla \Pi^1) - \nabla \cdot (a_2 \nabla \Pi^0) - \lambda_0 b_0 \Pi^0 \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ \Pi^2 = 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega}. \end{array} \right.$$

- $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  les fonctions 2 côtés

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0|_{\hat{\Omega}_{int}}(\mathbf{X}) = a|_{\Omega_{int}}(0) \text{ et } a_0|_{\hat{\Omega}_{ext}}(\mathbf{X}) = a|_{\Omega_{ext}}(0), \\ a_1|_{\hat{\Omega}_{int}}(\mathbf{X}) = \nabla a|_{\Omega_{int}}(0) \cdot \mathbf{X} \text{ et } a_1|_{\hat{\Omega}_{ext}}(\mathbf{X}) = \nabla a|_{\Omega_{ext}}(0) \cdot \mathbf{X}, \\ a_2|_{\hat{\Omega}_{int}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot (H_a|_{\Omega_{int}}(0) \mathbf{X}) \text{ et } a_2|_{\hat{\Omega}_{ext}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot (H_a|_{\Omega_{ext}}(0) \mathbf{X}). \end{array} \right.$$

1]

$\hat{\Omega}$

# Le développement en champ proche

Les coefficients sont solutions des problèmes elliptiques

- de symbol principal  $\nabla \cdot (a_0 \nabla)$  à deux côtés

$$a_0|_{\Omega_{\text{ext}}} = a_{\text{ext}}(\mathbf{0}) \text{ et } a_0|_{\Omega_{\text{int}}} = a_{\text{int}}(\mathbf{0}) \quad (3)$$

- munis de condition de transmission

$$\begin{cases} [\Pi^0] = 0 \text{ et } [a_0 \partial_x \Pi^0] = 0, \\ [\Pi^1] = 0 \text{ et } [a_0 \partial_x \Pi^1] = -[a_1 \partial_x \Pi^0], \\ [\Pi^2] = 0 \text{ et } [a_0 \partial_x \Pi^2] = -[a_1 \partial_x \Pi^1] - [a_2 \partial_x \Pi^0]. \end{cases}$$

- sur le domaine de champ proche  $\hat{\Omega}$

$$\hat{\Omega} := \mathbb{R}^2 \setminus \left( \{0\} \times (]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[) \right). \quad (4)$$

- Ces problèmes ne définissent pas de manière unique  $\Pi^0$ ,  $\Pi^1$  et  $\Pi^2$ .

**Information manquante:** Le comportement asymptotique de  $\Pi^i$  à l'infini.

# Le raccordement des développements asymptotiques

On assure l'unicité de  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $\Pi^0$ ,  $\Pi^1$  et  $\Pi^2$  en dérivant des conditions de raccord. On utilise un principe de type Van Dyke

- 1 Le champ lointain est tronqué à l'ordre  $m$

$$\sum_{i=0}^m \delta^i u^i. \quad (5)$$

- 2 Pour  $\mathbf{x} = \delta \mathbf{X}$ , on développe jusqu'à obtenir un reste d'ordre  $o(\delta^m)$ .

$$\sum_{i=0}^m \delta^i u^i(\delta \mathbf{X}) = \sum_{i=0}^m \delta^i U_m^i(\mathbf{X}) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m). \quad (6)$$

- 3 Ceci définit les comportements à l'infini  $U_m^i$  des champs proches  $\Pi^i$

$$\Pi^i - U_m^i = o_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^{m-i}}\right) \quad \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket. \quad (7)$$

# Les coefficients limites

Nous obtenons les **conditions de raccord** et obtenons les définitions de  $u^0$ ,  $\lambda^0$  et  $\Pi^0$ .

**Champ lointain.** La fonction  $u^0$  est une fonction propre de l'opérateur elliptique:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^0 \in H^1(\Omega) \text{ et } \lambda^0 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^0) + \lambda^0 b u^0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (8)$$

Pour simplifier la présentation, on considère le cas  $u^0 \equiv 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$

**Champ proche.** La coefficient  $\Pi^0$  vérifie

$$\Pi^0 \equiv 0. \quad (9)$$

# Les coefficients d'ordre 1

Les **conditions de raccord** permettent de définir de manière unique  $u^1$ ,  $\lambda^1$  et  $\Pi^1$ .  
**Champ lointain.**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^1 \in H^1(\Omega) \text{ et } \lambda^1 \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^1) + \lambda^0 b u^1 = -\lambda^1 b u^0, & \text{dans } \Omega, \\ u^1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (10)$$

En fait,  $u^1$  est régulier. D'après l'alternative de Fredholm, le second membre doit être orthogonal à  $u^0$

$$\lambda^1 \int_{\Omega} b(x, y) (u^0(x, y))^2 dx dy = 0. \quad (11)$$

On obtient  $\lambda^1 = 0$ .

$u^1$  est alors défini à sa composante  $u^0$  près

$$u^1 = \gamma u^0 \text{ dans } \Omega_{int} \text{ et } u^1 = 0 \text{ dans } \Omega_{ext}, \quad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

On peut arbitrairement ajouter la condition

$$\int_{\Omega} b(x, y) u^1(x, y) u^0(x, y) dx dy = 0 \Rightarrow u^1 \equiv 0.$$

## Les coefficients d'ordre 2

La **procédure de raccord** introduit le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^2 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^2) + \lambda^0 b u^2 = -\lambda^2 b u^0, \text{ dans } \Omega, \\ u^2 = 0, \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \\ u_{int}^2(\mathbf{x}) - \partial_x u_{int}^0(0) \frac{1}{8} \frac{a|_{\Omega_{int}}(0)}{a|_{\Omega_{int}}(0) + a|_{\Omega_{ext}}(0)} \frac{\sin(\theta)}{r} = O_{r \rightarrow 0}(1), \\ u_{ext}^2(\mathbf{x}) + \partial_x u_{int}^0(0) \frac{1}{8} \frac{a|_{\Omega_{ext}}(0)}{a|_{\Omega_{int}}(0) + a|_{\Omega_{ext}}(0)} \frac{\sin(\theta)}{r} = O_{r \rightarrow 0}(1), \end{array} \right. \quad (13)$$

- La fonction  $u^2$  est singulière:  $u^2 \notin H^1(\Omega)$ .
- A cause de ces singularités, l'alternative de Fredholm ne peut pas être appliquée directement pour obtenir  $\lambda^2$ .

**Proposition:** Le problème (13) admet des solutions. De plus, si  $(u^2, \lambda^2)$  et  $(u_*^2, \lambda_*^2)$  sont deux solutions alors elles vérifient

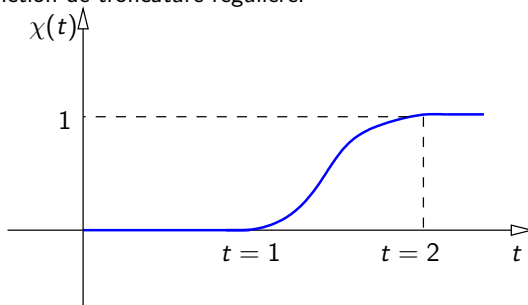
$$\lambda^2 = \lambda_*^2 = -\frac{\pi}{8} \frac{(a|_{\Omega_{int}}(0))^2}{a|_{\Omega_{int}}(0) + a|_{\Omega_{ext}}(0)} \frac{|\partial_x u_{int}^0(0)|^2}{\|u^0\|_0^2} \quad \text{et} \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} : u_*^2 - u^2 = \gamma u^0.$$

# Les coefficients d'ordre 2

**Idée de la preuve:** On introduit la fonction auxiliaire  $\omega^2$

$$\begin{aligned}\omega_{int}^2 &= u_{int}^2 - \chi(r) \partial_x u_{int}^0(0) \frac{1}{8} \frac{a|_{\Omega_{int}}(0)}{a|_{\Omega_{int}}(0) + a|_{\Omega_{ext}}(0)} \frac{\sin(\theta)}{r} \in L^2(\Omega_{int}), \\ \omega_{ext}^2 &= u_{ext}^2 + \chi(r) \partial_x u_{int}^0(0) \frac{1}{8} \frac{a|_{\Omega_{ext}}(0)}{a|_{\Omega_{int}}(0) + a|_{\Omega_{ext}}(0)} \frac{\sin(\theta)}{r} \in L^2(\Omega_{ext}).\end{aligned}\tag{14}$$

avec  $\chi$  une fonction de troncature régulière:



On applique alors l'alternative de Fredholm à  $\omega_2$  qui est régulier et on obtient  $\lambda_2$ .

# Développement des valeurs propres

## Théorème:

Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une valeur propre  $\lambda^\delta$  qui vérifie

$$\left| \lambda^\delta - (\lambda^0 + \delta^2 \lambda^2) \right| \leq C \delta^3 |\ln(\delta)| \quad (15)$$

avec

$$\begin{cases} \lambda^2 = -\frac{\pi}{8} \frac{(a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}))^2}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \frac{|\partial_x u_{\text{int}}^0(\mathbf{0})|^2}{\int_{\Omega} b(u^0)^2}, & \text{si } u_{\text{ext}}^0 = 0, \\ \lambda^2 = -\frac{\pi}{8} \frac{(a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}))^2}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \frac{|\partial_x u_{\text{ext}}^0(\mathbf{0})|^2}{\int_{\Omega} b(u^0)^2}, & \text{si } u_{\text{int}}^0 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Généralisation d'un résultat de [Gadyl'shin \(92\)](#) pour le cas à coefficients constants.



## Idée de la preuve: une approximation quasi-mode

- Un mode  $(u^\delta, \lambda^\delta) \in H_0^1(\Omega^\delta) \times \mathbb{R}$  vérifie  $u^\delta \neq 0$  et

$$\int_{\Omega^\delta} a \nabla u^\delta \nabla v - \lambda^\delta \int_{\Omega^\delta} b u^\delta v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

- Un  $\varepsilon$ -quasi-mode  $(w^\delta, \mu^\delta) \in H_0^1(\Omega^\delta) \times \mathbb{R}$  vérifie  $w^\delta \neq 0$  et

$$\left| \int_{\Omega^\delta} a \nabla w^\delta \nabla v - \mu^\delta \int_{\Omega^\delta} b w^\delta v \right| \leq \varepsilon \|w^\delta\|_{L_b^2(\Omega^\delta)} \|v\|_{L_b^2(\Omega^\delta)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

### Lemme:

Soit  $(w^\delta, \mu^\delta)$  un  $\varepsilon$ -quasi-mode. Il existe un mode  $(u^\delta, \lambda^\delta)$ :

$$|\lambda^\delta - \mu^\delta| \leq \varepsilon.$$

# Idée de la preuve: une approximation uniformément valide

Soit le **quasi-mode**  $(\tilde{w}^\delta, \lambda^0 + \delta^2 \lambda^2)$

$$\tilde{w}^\delta = \chi^\delta \left( u^0 + \delta u^1 + \delta^2 u^2 \right) + \Psi \left( \hat{\Pi}^0 + \delta \hat{\Pi}^1 + \delta^2 \hat{\Pi}^2 \right) - \chi^\delta \Psi \left( \hat{U}_2^0 + \delta \hat{U}_2^1 + \delta^2 \hat{U}_2^2 \right).$$

avec

- $\chi^\delta$  la fonction de troncature définie par  $\chi^\delta(r, \theta) := \chi(r/\delta)$ .
- $\Psi$  la fonction de troncature définie par  $\Psi(r, \theta) = 1 - \chi(r)$ ;
- $\hat{\Pi}^i$  les champs proches exprimés en fonction de  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{\Pi}^i(\mathbf{x}) = \Pi^i(\mathbf{x}/\delta)$ .
- $\hat{U}^i$  les comportements communs aux champs proches et champs lointains  $\hat{U}^i(\mathbf{x}) = U^i(\mathbf{x}/\delta)$ .

# Idée de la preuve: estimation finale

Estimation:

$$\left| a(\tilde{w}^\delta, v) - (\lambda^0 + \delta^2 \lambda^2) (\tilde{w}^\delta, v)_0 \right| \leq C \delta^2 \|\tilde{w}^\delta\|_0 \|v\|_0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

⇒ Existence d'une valeur propre  $\lambda^\delta$  de l'opérateur elliptique sur  $\Omega^\delta$  vérifiant

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta^2 \lambda^2 + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

C'est un résultat sous-optimal

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

Développement asymptotique du troisième ordre ⇒ estimation optimale

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta^2 \lambda^2 + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^3 \ln \delta)$$

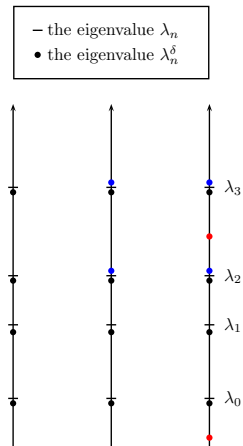
# A-t-on identifié l'ensemble des valeurs propres?

Etat des lieux:

- Il existe un  $\lambda_n^\delta$  dans un petit voisinage de  $\lambda_n$
- $0 < \lambda_{\sigma(n)}^\delta \leq \lambda_n$  pour  $\delta$  suffisamment petit.

Des questions

- un unique  $\lambda_n^\delta$  dans le voisiage de  $\lambda_n$ ?
- d'autres  $\lambda_n^\delta$ ?



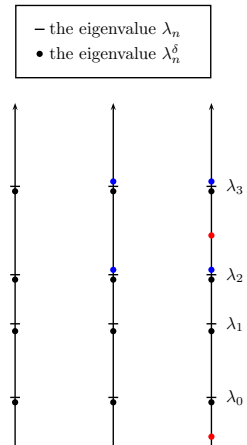
# A-t-on identifié l'ensemble des valeurs propres?

Etat des lieux:

- Il existe un  $\lambda_n^\delta$  dans un petit voisinage de  $\lambda_n$
- $0 < \lambda_{\sigma(n)}^\delta \leq \lambda_n$  pour  $\delta$  suffisamment petit.

Des réponses (grâce au **min-max**)

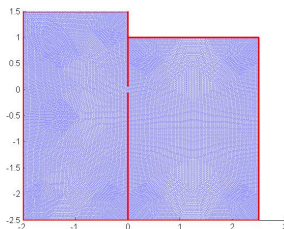
- un unique  $\lambda_n^\delta$  dans le voisiage de  $\lambda_n$ ? **oui**
- d'autres  $\lambda_n^\delta$ ? **non**



# Simulation numérique: Un cas semi-analytique

$\Omega^\delta$  est défini par la figure suivante avec

$$\Omega_{int} = ]-2, 0[ \times ]-2.5, 1.5[ \quad \text{and} \quad \Omega_{ext} = ]0, 2.5[ \times ]-1.5, 1[. \quad (17)$$

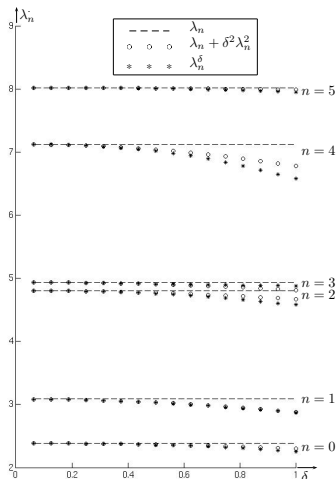


A computational mesh.

Rappel: les éléments propres du rectangle  $[0, a] \times [0, b]$  sont connus analytiquement

$$\lambda_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \quad U_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \quad (18)$$

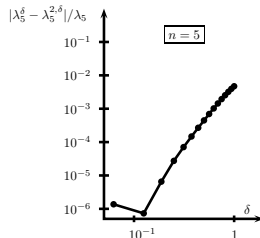
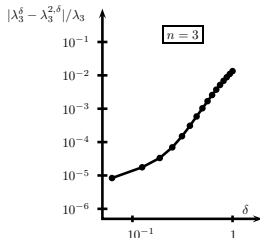
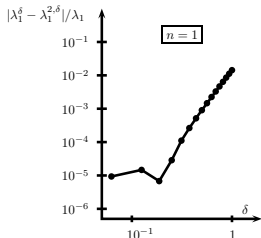
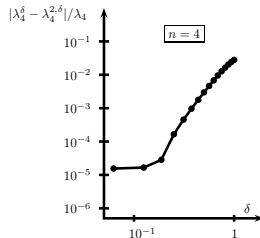
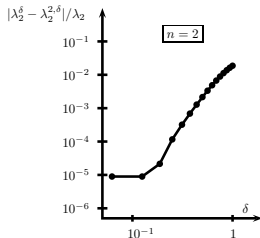
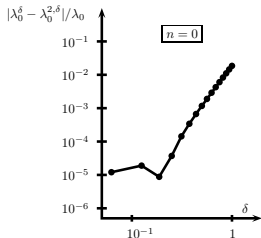
# Simulation numérique: Un cas semi-analytique



- Les  $\lambda_n^{\delta^2}$  sont calculés analytiquement
- Les  $\lambda_n^\delta$  sont calculés numériquement

$n$	$\lambda_n$	$\lambda_n^2$
0	2.38	-0.087
1	3.08	-0.207
2	4.80	-0.135
3	4.93	-0.121
4	7.12	-0.347
5	8.02	-0.036

# Les erreurs relatives





## Partie II

# Condition aux limites de Neumann en 3D avec Fares (Cerfacs), Tizaoui

# Le problème modèle

## Le problème:

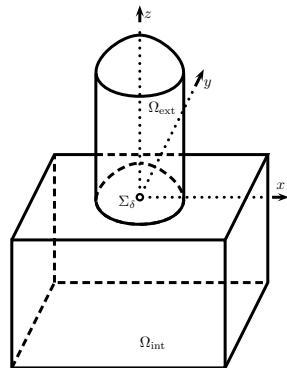
Trouver  $u_n^\delta \in H^1(\Omega^\delta)$  et  $\lambda_n^\delta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u_n^\delta) = \lambda_n^\delta b u_n^\delta \text{ dans } \Omega^\delta, \\ \partial_n u_n^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega^\delta, \end{cases}$$

- avec  $a$  et  $b$  deux fonctions régulières, positives et **deux côtés**

$$a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \text{ and } b|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \neq b|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})$$

- Le petit paramètre  $\delta > 0$  est le diamètre du trou.
- Le trou est définie de manière autosimilaire autour de  $\mathbf{0}$   $\Sigma_\delta = \delta \Sigma$ .



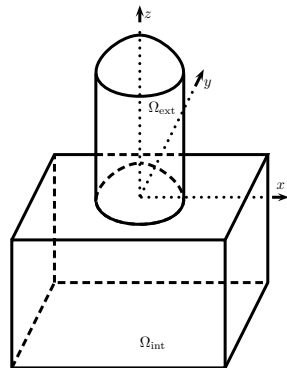
# Le problème limite

## Le problème:

Trouver  $u_n \in H^1(\Omega)$  et  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u_n) = \lambda_n b u_n \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

- Cette géométrie correspond à  $\delta = 0$
- La valeur propre zéro est forcément double!
- [pas d'hypothèse sur la multiplicité](#)



# Théorie classique des problèmes aux valeurs propres

Les  $\lambda_n^\delta$  et  $\lambda_n$  forment des familles dénombrables:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1^\delta < \lambda_2^\delta \leq \lambda_3^\delta \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^\delta \leq \lambda_n^\delta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ 0 = \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases}$$

Le principe du min-max:

$$\lambda_n^\delta \geq \lambda_n \quad \forall \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quelques questions naturelles:

$$\lambda_n^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lambda_n?$$

Peut-on dériver une méthode efficace de calcul de  $\lambda_n^\delta$  sans raffinement de maillage local?

# Le développement des valeurs propres

- Le développement d'ordre 1 s'écrit

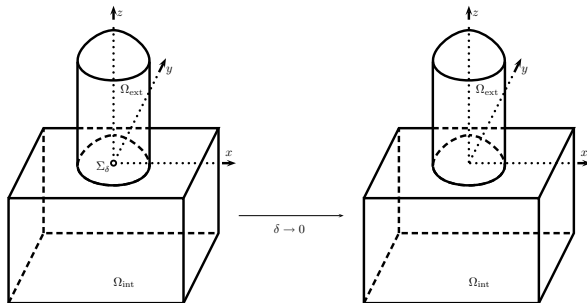
$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta \lambda^1 + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta).$$

- Les coefficients  $\lambda^i \in \mathbb{R}$  ne dépendent pas de  $\delta$
- Fonction de jauge logarithmique dès l'ordre 2

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + \delta \lambda^1 + \delta^2 \lambda^{2,0} + \delta^2 \ln \delta \lambda^{2,1} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

- très étonnant en dimension 3 (coefficients variables)

# Le développement en champ lointain



## Le développement d'ordre 1:

$$u^\delta = u^0 + \delta u^1 + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta)$$

Les coefficients  $u^i$  sont

- définis sur le domaine limite  $\Omega$
- indépendants de  $\delta$

# Les coefficients de champ lointain

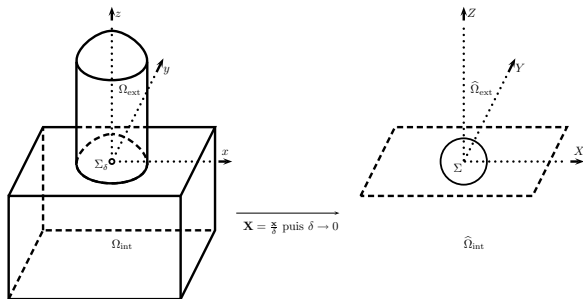
Les coefficients sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^0 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^0) + \lambda^0 b u^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n u^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lambda^1 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^1) + \lambda^0 b u^1 = -\lambda^1 b u^0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n u^1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

- Les  $u^i$  peuvent être **singulier en 0**.
- **Information manquante**: le comportement de  $u^i$  en 0.

# Le développement en champ proche



## Le développement d'ordre 1:

$$\Pi^\delta(\mathbf{X}) = u^\delta(\mathbf{X}\delta) \text{ et } \Pi^\delta = \Pi^0 + \delta \Pi^{1,0} + \delta \ln \delta \Pi^{1,1} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta)$$

Les coefficients  $\Pi^i$  sont

- définis sur le domaine limite  $\widehat{\Omega}$
- indépendants de  $\delta$



# Les coefficients de champ proche

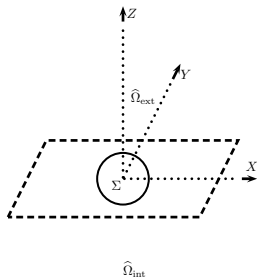
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^0 \in H_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^0) = 0 \text{ dans } \widehat{\Omega}, \\ \partial_n \Pi^0 = 0 \text{ sur } \partial \widehat{\Omega}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^1 \in H_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^1) = -\nabla \cdot (a_1 \nabla \Pi^0) \text{ dans } \widehat{\Omega}, \\ \partial_n \Pi^1 = 0 \text{ sur } \partial \widehat{\Omega}. \end{array} \right.$$

- $a_0$  et  $a_1$  les fonctions 2 côtés

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0|_{\widehat{\Omega}_{\text{int}}}(\mathbf{X}) = a|_{\Omega_{\text{int}}}(0) \\ a_0|_{\widehat{\Omega}_{\text{ext}}}(\mathbf{X}) = a|_{\Omega_{\text{ext}}}(0), \\ a_1|_{\widehat{\Omega}_{\text{int}}}(\mathbf{X}) = \nabla a|_{\Omega_{\text{int}}}(0) \cdot \mathbf{X}, \\ a_1|_{\widehat{\Omega}_{\text{ext}}}(\mathbf{X}) = \nabla a|_{\Omega_{\text{ext}}}(0) \cdot \mathbf{X}. \end{array} \right.$$

- Il manque les comportements en  $+\infty$ .



# Les coefficients limites

## Le champ lointain limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in H^1(\Omega) \text{ et } \lambda^0 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \nabla \cdot (a \nabla u^0) + \lambda^0 b u^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n u^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

On limite notre présentation au cas d'une valeur propre simple avec  $u^0|_{\Omega_{\text{ext}}} = 0$ .

## Le champ proche limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^0 \in H_{\text{loc}}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^0) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ \partial_n \Pi^0 = 0 \text{ sur } \partial\hat{\Omega}, \\ \Pi^0|_{\hat{\Omega}_{\text{int}}}(\mathbf{X}) = u^0|_{\Omega_{\text{int}}}(0) + o_{\|X\| \rightarrow +\infty}(1), \\ \Pi^0|_{\hat{\Omega}_{\text{ext}}}(\mathbf{X}) = o_{\|X\| \rightarrow +\infty}(1). \end{array} \right.$$

- Un laplacien à deux côtés

# Les coefficients limites

## Résolution du problème de champ proche

- Le coefficient  $a_0$  est constant par partie. On peut utiliser une méthode d'équation intégrale
- Par linéarité on se ramène à un problème canonique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi^* \in H_{\text{loc}}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot (a_0 \nabla \Pi^*) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}, \\ \partial_n \Pi^* = 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega}, \\ \Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{int}}}(\mathbf{X}) = 1 + o_{\|X\| \rightarrow +\infty}(1), \\ \Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{ext}}}(\mathbf{X}) = o_{\|X\| \rightarrow +\infty}(1), \end{array} \right.$$

- On identifie des **champs sortants**

$$\Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{int}}} = 1 + \Pi_{\text{sor}}^*|_{\hat{\Omega}_{\text{int}}} \text{ et } \Pi_{\text{sor}}^*|_{\hat{\Omega}_{\text{ext}}} = \Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{ext}}}$$

# Les coefficients limites

## Résolution du problème de champ proche

$$\begin{cases} \Delta \Pi_{\text{sor}}^* = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}_{\text{int}}, \\ \Delta \Pi_{\text{sor}}^* = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}_{\text{ext}}, \\ \partial_n \Pi_{\text{sor}}^* = 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega}. \end{cases}$$

Représentation intégrale dans  $\hat{\Omega}_{\text{int}}$  et  $\hat{\Omega}_{\text{ext}}$  (principe des images)

$$\begin{cases} \Pi_{\text{sor}}^* = -2S \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} \Big|_{\Sigma_{\text{int}}} & \Longleftrightarrow & \Pi^* = 1 - 2S \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} \Big|_{\Sigma_{\text{int}}}, \\ \Pi_{\text{sor}}^* = 2S \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} \Big|_{\Sigma_{\text{ext}}} & \Longleftrightarrow & \Pi_{\text{sor}}^* = 2S \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} \Big|_{\Sigma_{\text{ext}}}. \end{cases}$$

avec  $\mathbf{S}$  l'opérateur de simple couche

$$\mathbf{S} : (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^* \mapsto H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \lambda \mapsto \mathbf{S}\lambda(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\lambda(\mathbf{X}')}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d\mathbf{X}'.$$

# Les coefficients limites

## Résolution du problème de champ proche

Condition de transmission à travers  $\Sigma$

$$\Pi^*|_{\Sigma_{\text{int}}} = \Pi^*|_{\Sigma_{\text{ext}}} \text{ et } a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \partial_z \Pi^*|_{\Sigma_{\text{int}}} = a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \partial_z \Pi^*|_{\Sigma_{\text{ext}}}$$

$\Rightarrow$  notre potentiel inconnu  $\lambda^*$

$$\partial_z \Pi^*|_{\Sigma_{\text{int}}} = - \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \frac{\lambda^*}{2}$$

$$\partial_z \Pi^*|_{\Sigma_{\text{ext}}} = - \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \frac{\lambda^*}{2}.$$

Le potentiel  $\lambda^*$  dépend seulement de la géométrie

Chercher  $\lambda^* \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^*$  tel que  $\mathbf{S}\lambda^* = 1$  sur  $\Sigma$ .

Résolution numérique par éléments de frontière

# Les coefficients limites

C'est gagné! on a  $\Pi^*$  par représentation intégrale

$$\Pi^* = \begin{cases} 1 - \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\lambda^*(\mathbf{X}')}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d\mathbf{X}' \right) & \text{dans } \hat{\Omega}_{\text{int}}, \\ + \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\lambda^*(\mathbf{X}')}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d\mathbf{X}' \right) & \text{dans } \hat{\Omega}_{\text{ext}}. \end{cases}$$

Comportement à l'infini

$$\Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{int}}}(\mathbf{X}) = 1 - \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \frac{\alpha}{\|\mathbf{X}\|}$$

$$\Pi^*|_{\hat{\Omega}_{\text{ext}}}(\mathbf{X}) = \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \frac{\alpha}{\|\mathbf{X}\|}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\lambda^*(\mathbf{X}')}{\|\mathbf{X}'\|} d\mathbf{X}'.$$

Lorsque  $\Sigma$  est un cercle de rayon  $\rho$ , on a  $\alpha = \frac{2}{\pi} \rho$ .

# Les coefficients d'ordre 1

## Champ proche d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_n^1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \nabla \cdot (a \nabla u_n^1) + \lambda_n b u_n^1 = -\lambda_n^1 b u_n \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_n^1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u_n^1 + \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \alpha}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} u_n|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \in H^1(\Omega_{\text{int}}), \\ u_n^1 - \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \alpha}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} u_n|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \in H^1(\Omega_{\text{ext}}), \end{array} \right.$$

On peut appliquer l'alternative de Fredholm à

$$v = u_n^1 + \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \alpha}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} u_n|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \in H^1(\Omega_{\text{ext}}).$$

# Les coefficients d'ordre 1

Le coefficient  $u_n^1$  existe et est unique modulo  $u_n$  et

$$\lambda_n^1 = 2 \pi \alpha \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \frac{(\bar{u}_n(\mathbf{0}))^2}{\int_{\Omega} b(u_n)^2}.$$

Développement asymptotique en  $\mathbf{0}$  de  $u_n^1$  (théorie de Kondratiev)

$$u_n^1|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{x}) = - \frac{a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \alpha}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} u_n|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \left( \frac{1}{r} - \frac{s_n^1(\mathbf{x})}{2} + r_n^1(\mathbf{x}) \right), \quad (19)$$

avec

$$s_n^1|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\partial_z a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})} \ln \left( \frac{\|\mathbf{x}\| - z}{2} \right)$$

et  $r_n^1 : \Omega_{\text{int}} \longrightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue.

Pour les coefficients de champ proche d'ordre 1, cela se corse!



# Le résultat principal

## Théorème: valeur propre simple

Si  $\lambda_n$  est une valeur propre simple du problème limite, alors  $\lambda_n^\delta$  admet le développement suivant

$$\lambda_n^\delta = \lambda_n + 2 \pi \alpha \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \frac{(\bar{u}_n(\mathbf{0}))^2}{\int_{\Omega} b(u_n)^2} \delta + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2 \ln \delta),$$

avec  $\alpha$  un coefficient dépendant seulement de la forme du trou et la notation

$$\bar{u}(\mathbf{0}) = u|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0}) \quad \text{si } u|_{\Omega_{\text{int}}} = 0,$$

$$\bar{u}(\mathbf{0}) = u|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) \quad \text{si } u|_{\Omega_{\text{ext}}} = 0.$$

Toutes les quantités présentes ne nécessitent **pas de raffinement de maillage**.

# Le résultat principal

## Théorème: valeur propre multiple

Si  $\lambda_n$  est une valeur propre du problème limite de multiplicité  $N + 1$  ( $\lambda_n = \dots = \lambda_{n+N}$ ), alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n^\delta = \lambda_n + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2), \\ \dots \\ \lambda_{n+N-1}^\delta = \lambda_n + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2), \\ \lambda_{n+N}^\delta = \lambda_n + 2\pi\alpha \frac{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0})a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})}{a|_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{0}) + a|_{\Omega_{\text{ext}}}(\mathbf{0})} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(\bar{u}_{n+p}(\mathbf{0}))^2}{\int_{\Omega} b(u_{n+p})^2} \delta + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2 \ln \delta), \end{array} \right.$$

avec  $\alpha$  un coefficient dépendant seulement de la forme du trou.

# Simulations numériques

- Deux séries d'expériences avec deux géométries et deux jeux de  $a$  et  $b$
- 10 valeurs pour  $\delta$  de  $10^{-2}$  à 1

$$\delta = 10^{-\frac{n}{5}} \text{ avec } n = 0, \dots, 10$$

- **Artillerie lourde:** 1 mailleur pro et 3 codes parallélisés du CERFACS
  - **Altair Hypermesh:** mailleur pro
  - **CESC:** développé par Fares et Bendali
    - solveur éléments finis  $P_1$  3D.
    - solveur éléments de frontière  $P_1$  3D .
  - **ARPACK:** solveur aux valeurs propres développé par Sorensen et al.
  - **MUMPS:** solveur direct de système linéaire creux
- calcul des  $\lambda_n^\delta$  avec raffinement de maillage ( $\#ddl > 10^6$ )
- calcul des  $\lambda_n$  sans raffinement de maillage

# Première expérience

## Le laplacien classique

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = 1. \quad (20)$$

Définition du domaine de calcul: deux cavités droites

$$\Omega_{\text{int}} = ] - \frac{\ell_x^{\text{int}}}{2}, \frac{\ell_x^{\text{int}}}{2} [\times ] - \frac{\ell_y}{3}, \frac{2\ell_y}{3} [\times ] - \ell_z, 0[,$$

$$\Omega_{\text{ext}} = ] - \frac{\ell_x^{\text{ext}}}{4}, \frac{3\ell_x^{\text{ext}}}{4} [\times ] - \frac{\ell_y}{3}, \frac{2\ell_y}{3} [\times ] 0, \ell_z[.$$

avec  $\ell_x^{\text{int}} = .6$ ,  $\ell_x^{\text{ext}} = 1.$ ,  $\ell_y = .8$ ,  $\ell_z = .3$ .

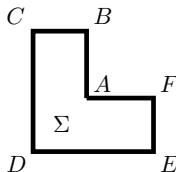
forme du trou  $\Sigma$ : Le polygone reliant les points

$A = (0, 0)$ ,  $B = (0, .1)$ ,

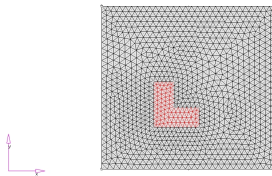
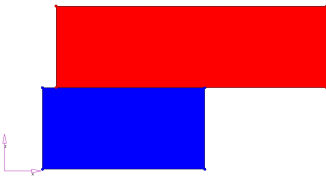
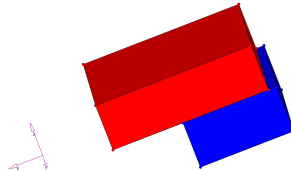
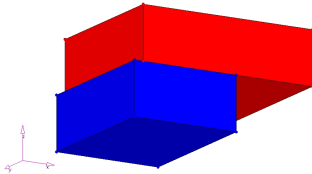
$C = (-.08, .1)$ ,  $D = (-.08, -.08)$ ,

$E = (.1, -.08)$  et  $F = (.1, 0)$

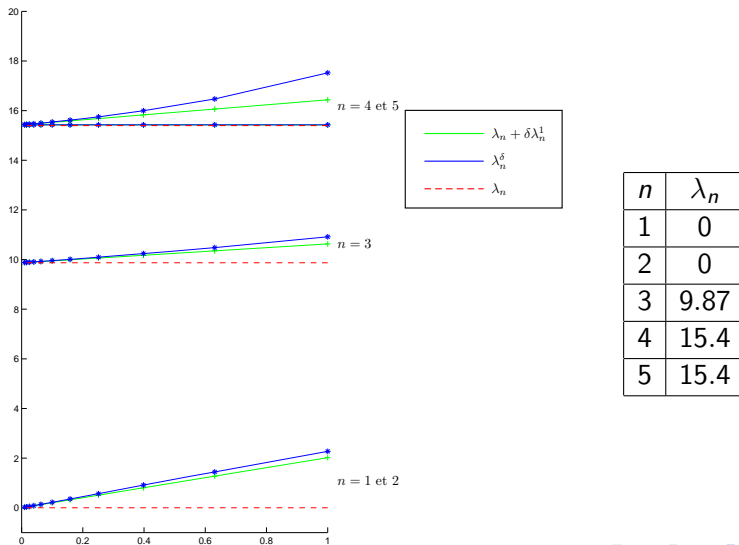
$$\alpha = 0.0578$$



# La géométrie



# Premiers résultats



# Les erreurs relatives

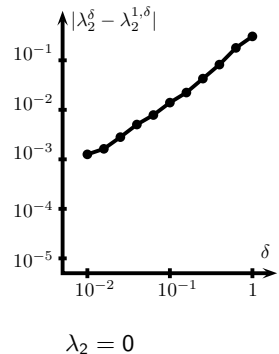
## Les erreurs pour la première valeur propre

Le vecteur propre 1 est double pour le problème limite

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

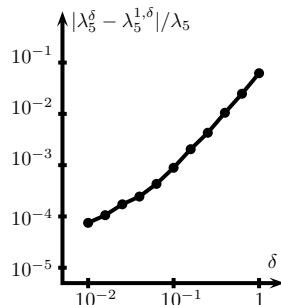
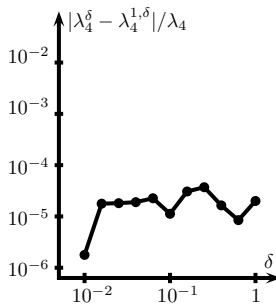
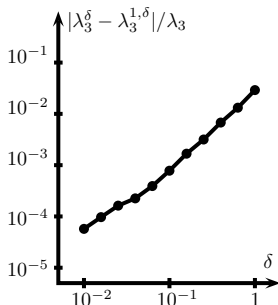
Il est aussi vecteur propre pour le problème modèle

$$\lambda_1^\delta = \lambda_1 = 0$$



# Les erreurs relatives

## Les erreurs relatives pour les deux premières valeurs propres doubles



valeur propre simple  $\lambda_3 = 9.87$

valeur propre double  $\lambda_4 = \lambda_5 = 15.4$

Problème de précision du solveur valeurs propres. C'est normal vu le nombre de degrés de libertés qui dépasse le million.



## Deuxième expérience

### Un laplacien deux côtés

$$a|_{\Omega_{\text{int}}} = 2, \quad a|_{\Omega_{\text{ext}}} = 1, \quad b|_{\Omega_{\text{int}}} = 1, \quad b|_{\Omega_{\text{ext}}} = 2.$$

Définition du domaine de calcul: une cavité droite et une pyramide

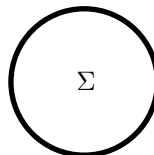
$$\Omega_{\text{int}} = ] -\frac{\ell_x}{4}, \frac{3\ell_x}{4} [\times ] -\frac{\ell_y}{3}, \frac{2\ell_y}{3} [\times ] -\ell_z, 0[,$$

$$\Omega_{\text{ext}} = \text{simplex}(A, B, C, D, E).$$

avec

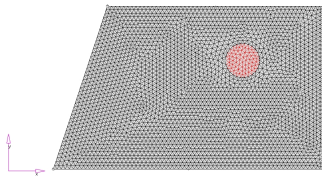
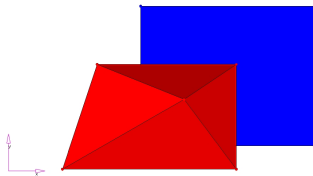
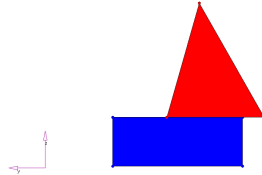
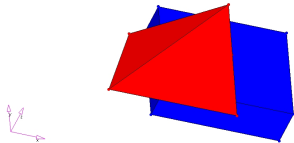
- $\ell_x = 1., \ell_y = .8, \ell_z = .3.$
- $A = (.3, -.4, 0), B = (-.7, .-.4, 0),$   
 $C = (-.5, .2, 0)$  and  $D = (.3, .2, 0)$  et  
 $E = (.1, .1, .7).$

Forme du trou  $\Sigma$ : un cercle de rayon .1.

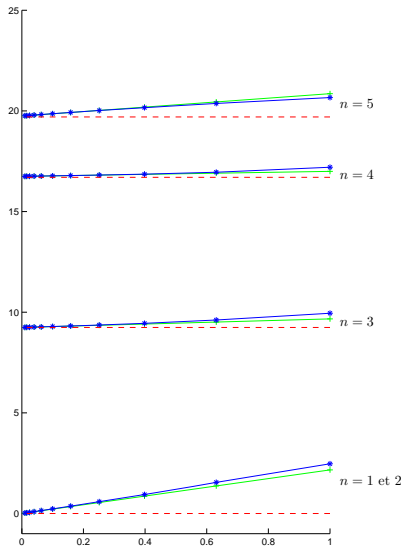


$$\alpha = 0.0636$$

# La géométrie



# Premiers résultats



$n$	$\lambda_n$
1	0
2	0
3	9.24
4	16.7
5	19.7

# Les erreurs relatives

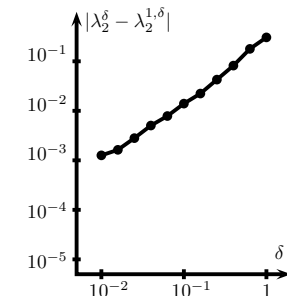
## Les erreurs relatives pour la seule valeur propre double

Le vecteur propre 1 est double pour le problème limite

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Il est aussi vecteur propre pour le problème modèle

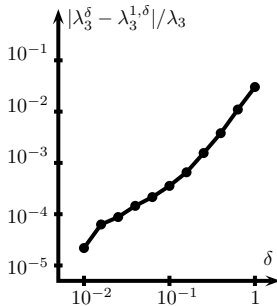
$$\lambda_1^\delta = \lambda_1 = 0$$



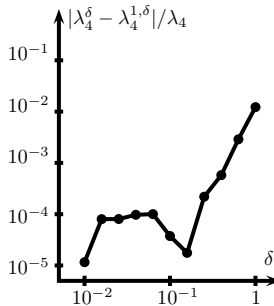
$$\lambda_2 = 0$$

# Les erreurs relatives

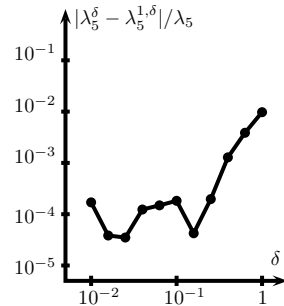
## Les erreurs relatives pour les trois premières valeurs propres simples



$\lambda_3 = 9.24$



$\lambda_4 = 16.7$



$\lambda_5 = 19.7$

**Problème de précision du solveur valeurs propres.** C'est normal vu le nombre de degrés de libertés qui dépasse le million.

# Conclusion

Résultats principaux: Une approximation des valeurs propres

- avec une assise théorique
- sans raffinement de maillage au voisinage du trou

Quelques publications:

- Dirichlet 2D: [Bendali, Tizaoui, Tordeux, Vila](#), SAM Research Report (2009)
- Dirichlet 2D: [Bendali, Huard, Tizaoui, Tordeux and Vila](#), CRAS (2009)
- Neumann 3D: [Fares, Tizaoui and Tordeux](#), en préparation

**Remerciements:** Ce travail est en partie financé par l'ANR: projet APAM (Acoustique et Paroi Multi-perforée).

*Je vous remercie*

